Zahlenfolgen

Anwendungen der Geometrischen Folgen

Geometrische Figuren
als
geometrische Folgen

Trainingsaufgaben

Datei Nr. 40060

Friedrich Buckel

Stand: 16. November 2016

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Hier findet man 14 Folgen zu geometrischen Figuren.

Jetzt versteht man auch, woher der Name „geometrische“ Folge kommt.

Viel Spaß damit!

HINWEIS zu anderen Texten über Folgen:

40011 **Einführung**

Rekursive und explizite Berechnungsformeln

Grundlagen zu arithmetischen und geometrischen Folgen
(Dies wird in vorliegendem Text wiederholt!)

Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen (kurze Einführung)

40012 **Arithmetische und geometrische Folgen**

(ausführlicher als in 40011)

40013 **Arithmetische Folgen 2. Ordnung**
Dies wurde auch schon in 40011 angesprochen

40019 **Geometrische Folgen: Prozentuales Wachstum**

Prozentuales (= exponentielles) Wachstum und Abnahme (Zinseszinsrechnung, radioaktiver Zerfall).
Hier wird noch einmal besprochen, was kurz in 40011 gezeigt worden ist.
Wer es also ausführlicher braucht, lese hier nach!

40020 **Spezielle Wachstumsfolgen**

Hier geht es um die rekursive Formel $u_n = u_{n-1} \cdot q + r$.
und die explizite Berechnung der Formeln.

Zu den Anwendungen gehören auch schwierigere finanzmathematische Vorgänge wie Ratensparen, Rentenzahlung, Darlehensfinanzierung.

Allgemein beschreiben diese Folgen das beschränkte Wachstum.
Dazu gehört auch die beschränkte Abnahme (Abkühlungsvorgänge u.a.)

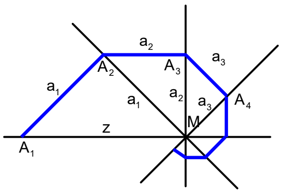
40050 **Arithmetische und geometrische Reihen**

40060 **Geometrische Figuren als geometrische Folgen** **(Dieser Text)**
Es kommen auch Teilaufgaben zu Reihen vor.

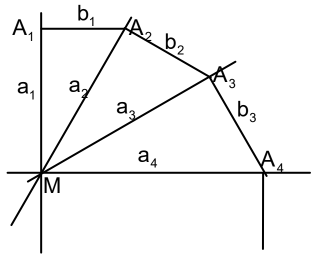
40200 **Aufgabensammlung zu ar./geom. Folgen und Reihen**

Inhalt

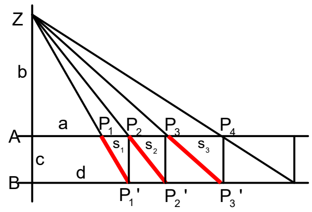
Seite 4



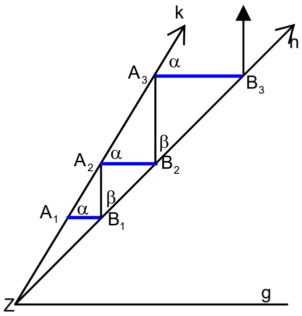
Seite 5 (auch geom. Reihe)



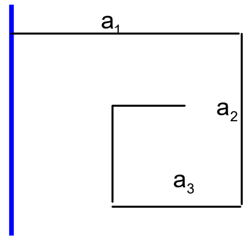
Seite 7



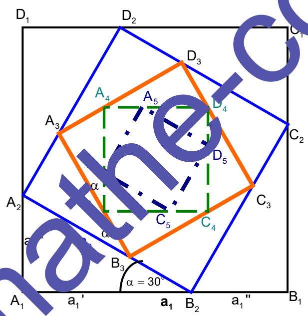
Seite 8



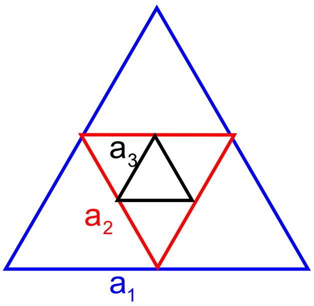
Seite 9 (auch geom. Reihe)



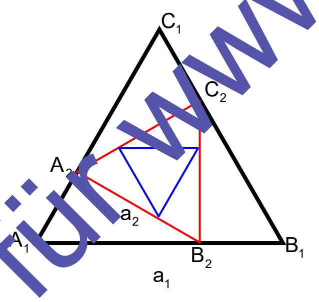
Seite 10



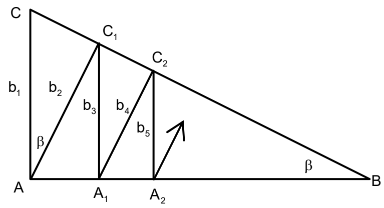
Seite 13



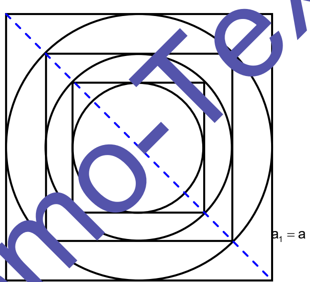
Seite 14 (auch geom. Reihe)



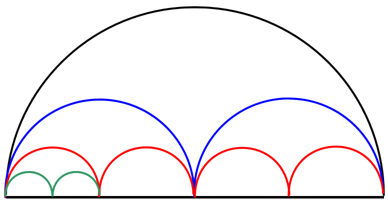
Seite 16



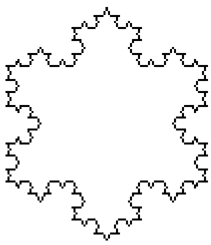
Seite 17



Seite 18

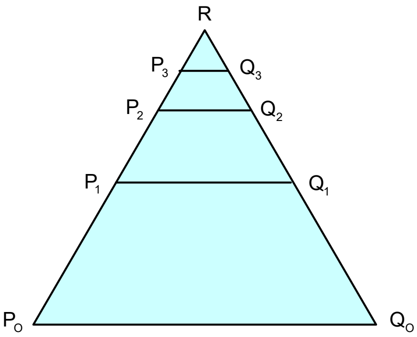


Seite 19

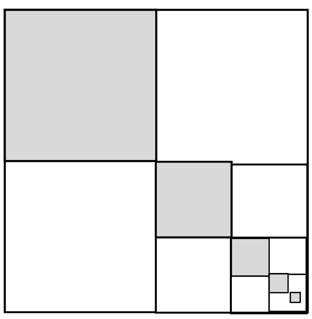


Koch’sche Schneeflocken.

Seite 21

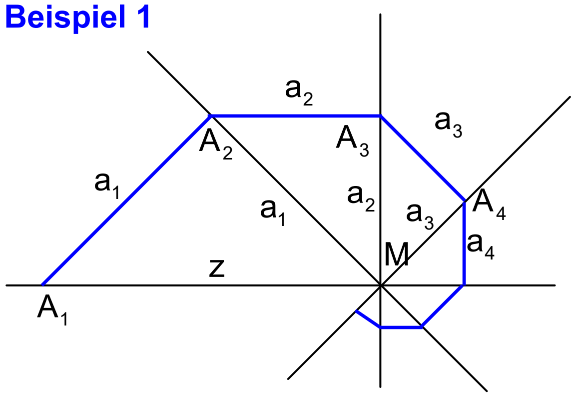


Seite 23



1. Geometrische Beispiele zu geometrischen Folgen

Beispiel 1



Nebenstehende Streckenschnecke entsteht, indem man von 4 Geraden ausgeht, die miteinander jeweils 45° bilden.
Man beginnt mit einem Punkt A_1, der vom Mittelpunkt M die Entfernung z (z.B. z = 8) hat.
Von A_1 aus fällt man das Lot auf die nächste Gerade bis A_2. Von dort aus fällt man wieder das Lot bis A_3 usw. So entsteht eine Folge von Strecken a_1 , a_2 , ...

Berechne rekursiv a_1 bis a_4 sowie eine explizite Formel für a_n.
Zeige, dass eine geometrische Folge vorliegt.
Berechne a_{20}. Was lässt sich vermuten?

Lösung

Weil die Innenwinkel bei M alle 45° haben und zudem jedes der Dreiecke rechtwinklig ist, sind sie sogar gleichschenklig. Daher kann man mit dem Pythagoras diese Kette von Gleichungen erstellen:

Dreieck A_1MA_2: $a_1^2 + a_1^2 = z^2 \Rightarrow 2a_1^2 = z^2 \Rightarrow a_1^2 = \frac{1}{2}z^2$, also wird $a_1 = z \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$.

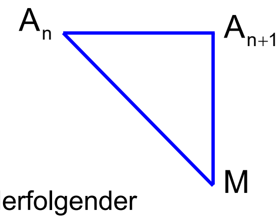
Dreieck A_2MA_3: $a_2^2 + a_2^2 = a_1^2 \Rightarrow 2a_2^2 = a_1^2 \Rightarrow a_2^2 = \frac{1}{2}a_1^2$, also wird $a_2 = a_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

Dreieck A_3MA_4: $a_3^2 + a_3^2 = a_2^2 \Rightarrow 2a_3^2 = a_2^2 \Rightarrow a_3^2 = \frac{1}{2}a_2^2$, also wird $a_3 = a_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

analog erhält man: $a_4 = a_3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

Hieraus erkennt man schon, dass jede nachfolgende Streckenlänge durch Multiplikation mit dem Faktor $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ entsteht. Das kann man auch einfacher mit dieser Rechnung erhalten:

Man wählt ein beliebiges Dreieck A_nMA_{n+1}. In ihm gilt:



$$a_n^2 + a_n^2 = a_{n-1}^2 \Rightarrow 2a_n^2 = a_{n-1}^2 \Rightarrow a_n^2 = \frac{1}{2}a_{n-1}^2$$

Also folgt $a_n = a_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Daraus bildet man $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und man sieht, dass der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist ! Also liegt eine **geometrische Folge** vor mit $q = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Die explizite Berechnungsformel lautet:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = z\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n-1} = z \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n} = \frac{z}{\sqrt{2}^{\,n}} = z \cdot 2^{-\frac{n}{2}}}$$

Dabei ist z die selbst gewählte Anfangsstrecke.

Aus dieser Formel folgt: $a_{20} = z \cdot 2^{-10} \approx 0{,}0009765 \cdot z$